

# Bochner-Integral

Sei  $X$  ein reeller Banachraum mit Norm  $\|\cdot\|_X$ .

**Definition 1.** Eine Funktion  $f : S \rightarrow X$  heißt Treppenfunktion, wenn sie sich schreiben lässt als:

$$f(s) = \sum_{i=1}^n \chi_{B_i}(s) x_i$$

wobei  $x_i \in X$ , und  $B_i \subseteq S \subseteq \mathbb{R}$  für  $i = 1, \dots, n$  paarweise disjunkte Lebesguemessbare Mengen mit Lebesguemaß  $\mu(B_i) < \infty$  sind.

Für eine Treppenfunktion  $f$  definieren wir das Bochner-Integral durch:

$$\int_S f(s) ds := \sum_{i=1}^n \mu(B_i) x_i$$

**Definition 2.** Eine Funktion  $f : S \rightarrow X$  heißt Bochner-messbar, falls eine Folge  $(f_n)$  von Treppenfunktionen  $f_n : S \rightarrow X$  existiert, so dass für fast alle  $s \in S$  gilt:

$$(i) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n(s) - f(s)\|_X = 0$$

Genügt eine solche Folge der Bedingung

$$(ii) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_S \|f_n(s) - f(s)\|_X ds = 0$$

so heißt  $f$  Bochner-integrierbar, und wir definieren das Bochner-Integral als

$$(iii) \quad \int_S f(s) ds := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_S f_n(s) ds$$

**Lemma 1.** Wenn  $f : S \rightarrow X$  Bochner-messbar ist, dann ist die Funktion  $\|f(\cdot)\| : S \rightarrow \mathbb{R}$  Lebesgue-messbar.

**Satz 1** (Pettis 1938). Sei  $X$  ein separabler Banachraum. Dann ist  $f : S \rightarrow X$  genau dann Bochner-messbar, wenn für alle  $F \in X^*$  die Funktion  $\langle F, f(\cdot) \rangle_X : S \rightarrow \mathbb{R}$  Lebesgue-messbar ist.

**Folgerung 1.** Sei  $X$  ein separabler Banachraum. Ferner sei  $f : S \rightarrow X$  eine Funktion und seien  $f_n : S \rightarrow X, n \in \mathbb{N}$  Bochner-messbare Funktionen, so dass für fast alle  $s \in S$  gilt:  $f_n(s) \rightarrow f(s)$  für  $n \rightarrow \infty$ . Dann ist  $f$  Bochner-messbar.

**Satz 2** (Bochner 1933). *Eine Bochner-messbare Funktion  $f : S \rightarrow X$  ist genau dann Bochner-integrierbar, wenn die Funktion  $\|f(\cdot)\|_X : S \rightarrow \mathbb{R}$  Lebesgue-integrierbar ist.*

**Folgerung 2.** *Sei  $f : S \rightarrow X$  Bochner-integrierbar. Dann gilt:*

$$\left\| \int_S f(s) ds \right\|_X \leq \int_S \|f(s)\| ds$$

und für alle  $F \in X^*$ :

$$\left\langle F, \int_S f(s) ds \right\rangle_X = \int_S \langle F, f(s) \rangle ds$$

**Definition 3.** *Wir bezeichnen für  $1 \leq p < \infty$  mit  $L^p(S; X)$  die Menge aller Bochner-messbaren Funktionen, für die gilt:*

$$\int_S \|f(s)\|_X^p ds < \infty$$

*Die Menge aller Bochner-messbaren Funktionen, für die eine Konstante  $M$  existiert, so dass für fast alle  $s \in S$  gilt:  $\|f(s)\|_X \leq M$ , bezeichnen wir mit  $L^\infty(S; X)$*

**Satz 3.** *Die Menge  $L^p(S; X), 1 \leq p \leq \infty$  bildet einen Banachraum bezüglich der Norm*

$$\|f\|_{L^p(S; X)} := \begin{cases} \left( \int_S \|f(s)\|_X^p ds \right)^{1/p} & 1 \leq p < \infty \\ \text{ess sup}_S \|f(s)\|_X & p = \infty \end{cases}$$

**Lemma 2.** *Sei  $1 \leq p \leq \infty$ . Dann gilt:*

- (i) *Die Menge der Treppenfunktionen ist dicht in  $L^p(S; X)$ .*
- (ii) *Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein beschränktes Intervall. Dann ist der Raum  $C(\bar{I}; X)$  dicht in  $L^p(I; X)$ .*

**Satz 4** (Hölder-Ungleichung). *Sei  $f \in L^p(S; X), g \in L^{p'}(S; X^*)$ , wobei  $X^*$  der Dualraum von  $X$  ist,  $1 \leq p \leq \infty$  gilt und  $p'$  der duale Exponent ist, d.h.  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ . Dann ist  $\langle g(\cdot), f(\cdot) \rangle_X \in L^1(S, \mathbb{R})$  und es gilt:*

$$\left| \int_S \langle g(s), f(s) \rangle_X ds \right| \leq \|g\|_{L^{p'}(S; X^*)} \|f\|_{L^p(S; X)}.$$

**Satz 5.** Sei  $X$  ein reflexiver Banachraum und  $1 < p < \infty$ . Dann besitzt jedes Funktional  $F \in (L^p(S; X))^*$  genau eine Darstellung der Form

$$F(u) = \int_S \langle v(s), u(s) \rangle_X ds \quad \text{für alle } u \in L^p(S; X),$$

wobei  $v \in L^{p'}(S; X)$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$

## Räume mit Zeit

Sei  $S$  nun das Intervall  $[0, T]$ . Wir schreiben  $L^p(S; X)$  als  $L^p(0, T; X)$ .

**Definition 4.** Der Raum  $C([0, T]; X)$  enthält alle stetigen Funktionen  $u : [0, T] \rightarrow X$  mit

$$\|u\|_{C([0, T]; X)} = \max_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_X < \infty$$

**Definition 5.** Sei  $u \in L^1(0, T; X)$ . Wir sagen  $v \in L^1(0, T; X)$  ist die schwache Ableitung von  $u$ , falls gilt:

$$\int_0^T \phi'(t)u(t) dt = - \int_0^T \phi(t)v(t) dt \quad \forall \phi \in C_c^\infty(0, T)$$

**Definition 6.** Der Sobolev-Raum  $W^{1,p}(0, T; X)$  besteht aus allen Funktionen  $u \in L^p(0, T; X)$ , so dass  $u'$  im schwachen Sinne existiert und in  $L^p(0, T; X)$  liegt. Die Norm ist definiert als:

$$\|u\|_{W^{1,p}(0, T; X)} := \begin{cases} \left( \int_0^T \|u(t)\|_X^p + \|u'(t)\|_X^p dt \right)^{1/p} & \forall 1 \leq p < \infty \\ \text{ess sup}_{0 \leq t \leq T} (\|u(t)\|_X + \|u'(t)\|_X) & p = \infty \end{cases}$$

Außerdem schreiben wir  $H^1(0, T; X) = W^{1,2}(0, T; X)$

**Satz 6.** Sei  $u \in W^{1,p}(0, T; X)$  für ein  $1 \leq p < \infty$ . Dann gilt:

(i)  $u \in C(0, T; X)$

(ii)  $u(t) = u(s) + \int_s^t u(\tau) d\tau \quad \forall 0 \leq s \leq t \leq T$

(iii)  $\max_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_X \leq C \|u(t)\|_{W^{1,p}(0, T; X)}$

wobei die Konstante  $C$  nur von  $T$  abhängt.

**Satz 7.** Sei  $u \in L^2(0, T; H_0^1(U))$  mit  $u' \in L^2(0, T; H^{-1}(U))$ . Dann gilt:

(i)  $u \in C([0, T]; L^2(U))$

(nach eventuellem Umdefinieren auf einer Nullmenge)

(ii) Die Abbildung  $t \mapsto \|u(t)\|_{L^2(U)}^2$  ist absolut stetig mit

$$\frac{d}{dt} \|u(t)\|_{L^2(U)}^2 = 2 \langle u'(t), u(t) \rangle \quad \text{für fast alle } 0 \leq t \leq T$$

(iii)  $\max_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_{L^2(U)} \leq C \left( \|u(t)\|_{L^2(0, T, H_0^1(U))} + \|u'(t)\|_{L^2(0, T; H^{-1}(U))} \right)$

wobei die Konstante  $C$  nur von  $T$  abhängt.

**Satz 8.** Sei  $U$  offen und beschränkt,  $\partial U$  glatt,  $m$  nichtnegative ganze Zahl. Angenommen  $u \in L^2(0, T; H^{m+2}(U))$ , mit  $u' \in L^2(0, T; H^m(U))$ . Dann gilt:

(i)  $u \in C([0, T]; H^{m+1}(U))$

(nach eventuellem Umdefinieren auf einer Nullmenge)

(ii)  $\max_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_{H^{m+1}(U)} \leq C \left( \|u(t)\|_{L^2(0, T, H^{m+2}(U))} + \|u'(t)\|_{L^2(0, T; H^m(U))} \right)$

wobei die Konstante  $C$  nur von  $T$ ,  $U$  und  $m$  abhängt.

### Literatur zum Seminar über Evolutionsgleichungen:

Ulrike Schmidt, 1. Dezember 2006

Bochner-Integral - Ruzicka: Nichtlineare Funktionalanalysis, S. 31-44

Räume mit Zeit - Evans: Partial Differential Equations, S. 285-289